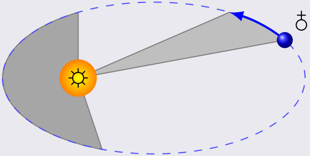
Bolygómozgás

Számítógépes szimulációk
fn1n4i11/1

Csabai István, Stéger József

ELTE
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
Email: csabai@complex.elte.hu, steger@complex.elte.hu

Egy Nap körül keringő bolygó pályája



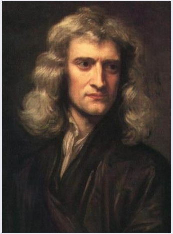
A Kepler-törvények:

1. A bolygók pályája ellipszis, és annak egyik gyújtópontjában van a Nap.
2. A bolygók vezérsugara (a bolygót a Nappal összekötő szakasz) azonos idők alatt azonos területet súrol.
3. A bolygók Naptól való átlagos távolságainak, azaz a pálya fél nagytengelyeinek (a) köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idejük (T) négyzetei. Tehát a $\frac{a^3}{T^2}$ hányados minden bolygó esetén ugyanakkora (ha azok ugyanabban a naprendszerben keringenek).

Kepler az előző törvényeket nem elméleti úton vezette le, hanem Tycho Brahe csillagászati megfigyelései alapján találta meg. A törvényeket később Isaac Newton vezette le a gravitációs elmélete alapján.

Tycho Brahe, Johann Kepler és Isaac Newton

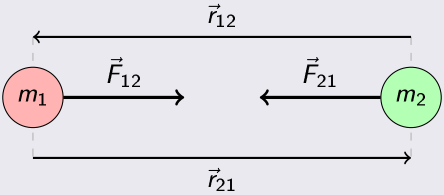




A gravitációs elmélet alapján több általánosítás tehető:

- a törvények nem csak egy bolygó-csillag párosra, hanem bolygó körül keringő holdakra és műholdakra, illetve bármely nagy tömegű égitest körül keringő más égitestekre is igazak
- a természetben nem csak kötött ellipszis alakú pályák lehetésgesek, hanem parabola és hiperbola is lehetséges

Tömegpontok dinamikája



Kepler törvényei Newton gravitációs törvényéből vezethetőek le:

$$\vec{F}_{12} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}.$$

A középpontba mutató erők következtében a perdület megmarad, így a pályák síkban helyezkednek el.

Észrevételek:

- a Nap tömege legalább 1000-szerese bármely bolygó tömegénél,
- feltehetjük, hogy a Nap mozdulatlan, illetve elhanyagolhatjuk a bolygók tömegét,
- bolygó-hold, csillag-csillag rendszerek esetén a tömegek nem hanyagólhatóak el, ekkor a tömegközéppont lesz mozdulatlan (redukált tömeg!).

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

Megoldás:

- a Kepler-pálya egyenlete (jelölje ϵ a pálya excentricitását):

$$r(\theta) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1-\epsilon\cos\theta}, \quad b = a\sqrt{1-\epsilon^2},$$

- a pálya sebesség:

$$v = \sqrt{\Gamma(m_1+m_2)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)},$$

- a teljes energia (a kinetikus és a potenciális energia együtt):

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \Gamma\frac{m_1 m_2}{r} = -\Gamma\frac{m_1 m_2}{2a},$$

- a keringési idő (Kepler 3-ik törvényéből):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\Gamma(m_1+m_2)}a^3$$

- a perdület:

$$\vec{L} = \vec{r}\times(\mu\vec{v}).$$

Két bolygó kering a közös tömegközéppontjuk körül. Határozzuk meg a pálya paramétereit!
Csillagászati egységekben dolgozunk:

- a Föld fél nagytengelye:

$$1\mathrm{AU} = 1,496 \cdot 10^{11}\mathrm{m}.$$

- Kepler 3-ik törvénye:

$$\Gamma(M_{\odot} + m_{\oplus}) = \frac{4\pi^2 a^3}{t^2}$$

- a távolságot mérjük csillagászati egységben (AU) és az időt években (yr):

$$\Gamma(M_{\odot} + m_{\oplus}) = 4\pi^2 \frac{\mathrm{AU}^3}{\mathrm{yr}^2}.$$

Kezdeti értékekek megválasztása:

- válasszuk a nagytengelyt az x-tengelynek,
- rögzítsük $x(t=0)$-t a közelpontban: $x(0) = a(1+\epsilon)$,
- a közelpontban a sebesség y irányú, adjuk meg $v_y(t=0)$-t,
- a sebesség a pálya egyenletből

$$v = \sqrt{\Gamma(m_1 + m_2)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

- Az előző összefüggések alapján $t = 0$-ban meghatározhatjuk a megadott paraméterek mellett az excentricitást és a fél nagytengely méretét

$$\epsilon = \frac{x(0) v_y(0)^2}{\Gamma(M_{\odot} + m_{\oplus})} - 1, \quad a = \frac{x(0)}{1+\epsilon}.$$

A pálya vizsgálatához ki akarjuk íratni az x-tengely metszeteket. A szimuláció véges lépéshosszai miatt, nem várható el, hogy pont a tengelyre essen egy-egy lépés, amikor keresztezzük az x-tengelyt, ezért vissza kell léptetnünk oda.

Visszaléptető algoritmus

- Áttérünk t-ről y változóra:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}.$$

- és a Runge-Kutta lépésköz legyen $-y$.

A probléma egyszerűnek tűnik: három tömeg (m_1, m_2, m_3), három pozició ($\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$) és három egyenlet.

Az 1. testre felírható egyenlet

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r_1}}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma m_2 \frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|} - \Gamma m_3 \frac{\vec{r_1} - \vec{r_3}}{|\vec{r_1} - \vec{r_3}|}$$

Tapasztalat:

- a megoldások azonban erősen függenek a kezdeti feltételektől!
- analitikusan csak nagyon kevés eset kezelhető.

Analitikusan kezelhető esetek

- a *síkbeli háromtest-probléma* — mind a 3 test egy közös síkban mozog,
- a *korlátozott háromtest-probléma* — $m_3 = 0$, ekkor m_1, m_2 Kepler-pályán mozog, míg a 3-ik körülöttük kering.

Általában a háromtest-problémák nem síkbeliek, de pl. a Naprendszer kezelhető síkbeliként.

- Az erőtörvények:

$$\vec{a}_1 = -\Gamma \frac{m_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{12} - \Gamma \frac{m_3}{r_{13}^2}\vec{r}_{13}$$

- A relatív poziciókra teljesül:

$$\vec{s}_1 = \vec{r}_3 - \vec{r}_2, \quad \vec{s}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \quad \vec{s}_3 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 = 0.$$

- A mozgás egyenletek:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{s}_i}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma \frac{m}{s^2}\vec{s}_i + m_i\vec{G}$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3, \quad \vec{G} = \Gamma \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{s}_i}{s_i^2}.$$

Nap-Föld-Jupiter applet

Változtatható paraméterek (Jupiterre és Földre külön-külön):

- m — a Jupiter illetve a Föld tömege (Naptömeg egységekben),
- e — excentricitásuk,
- a — a Föld fél nagytengelye (AU-ban),
- *theta* — a Föld kezdeti pálya szöge,
- *clockwise* — a keringési iránya,
- valamint a egy csúszkával az animáció sebessége.

Számolt értékek:

- t/T — keringési idő (saját évben),
- r — távolság (AU-ban),
- v — sebesség,
- L_z — az impulzusmomentum kerindési síkra merőleges vetülete.

Használjuk a kepler.cpp programot!

1. Azt várjuk, hogy a pályaellipszis nagytengelyének iránya és nagysága állandó. Teszteljük, hogy a numerikus hibák miatt ez változik-e, és ha igen, akkor mennyire. Vizsgáljuk meg, hogy a lépéshossz és az alkalmazott integrálási módszer mennyire befolyásolja ezt. Keressük meg a trajektória perihéliumát, és mérjük le a nagytengely szögét és hosszát, a kiindulási helyzethez képest!
2. Vizsgáljuk meg, hogy az adaptív lépéshossz hogyan változik a pálya mentén! Ábrázoljuk és magyarázzuk meg a kapott eredményt! Hasonlítsuk össze, hogy ugyanakkora precizitás megkövetelésekor (pl. 10 teljes pálya megtétele után legyen ugyanakkora hiba), mennyi futási idő szükséges a normál és az adaptív Runge-Kutta-szimulációhoz.

Lapozz a többi feladathoz!

3. A Merkúr (☿) perihélium precessziója. A Merkúr pályája erősen elnyúlt (excentricitása: $\epsilon = 0,2056$), így a pályán hosszú idő alatt megfigyelhető annak elfordulása. Erre az elfordulásra az általános relativitás elmélet adott magyarázatot. Ennek alapján a következő korrekció szükséges az erők megadásakor:

$$F = \Gamma \frac{m_{☼} m_{☿}}{r^2} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right).$$

Írjuk át a kódot ennek a korrekciónak a figyelembevételére. Vizsgáljuk meg, hogy $\alpha \approx 1,1 \cdot 10^{-8} \mathrm{AU}^2$ érték mellett mekkora perihélium mozgást tapasztalunk. A kapott értéket vessük össze a a Merkúr pályájának évszázadonkénti 43 ívmásodperces mért elfordulásával. (Tipp: kis α esetén a precesszó rátája $\propto \alpha$, azaz meghatározhatjuk a meredekséget és extrapolálhatunk $\alpha \approx 1,1 \cdot 10^{-8} \mathrm{AU}^2$-ra.)

4. Alakítsd át a forráskódot, hogy háromtest-problémát kezeljen. Próbálj ki különféle paramétereket, ábrázold a pályákat, vizsgáld a stabilitást!

5. Largrange-pontok (lásd Wikipédia) stabilitása. Szimuláljuk a Nap-Jupiter rendszert, és vizsgáljuk meg az L1, L2, L3, L4, L5 Lagrange-pontokba helyezett kis – a bolygó tömegénél sokkal kisebb – tömegek mozgását. Igazoljuk, hogy (csak) a L4-L5 pontok stabilak! A Jupiter esetében az utóbbi pontokban valóban összegyűlnek aszteroibák, az ún Trójai kisbolygók (linkek: trójaiak az SDSS-ben, Wikipedia).

A jegyzőkönyvet PDF formátumban küldjük be a `szamszim@gmail.com` címre!